第6讲 命题与定理

**知识梳理**

**1.定义与命题的概念**

(1)界定某个对象\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_的句子叫做**定义**.定义是对一个概念的特征性质的描述.

是定义的语句有明显的特征：语句有“叫做”“称为”等词语.

(2)判断一件事情的句子叫做**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**.其判断为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_的命题叫做**真命题**；其判断为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_的命题叫做**假命题**.

判断一个语句是否为命题要抓住两点：①命题通常是一个陈述句，包括肯定句和否定句，而疑问句和命令性语句都不是命题；②必须对某件事情做出肯定或否定的判断，二者必居其一.

答案：含义；命题；正确；错误

**2.公理；定理**

人们从长期的实践中总结出来的真命题叫做**公理**，它们可以作为判断其他命题真假的原始依据.有些命题是从公理或其他真命题出发，用推理方法证明为正确的，并进一步作为判断其他命题真假的依据，这样的真命题叫做**定理**.

**定义、公理和定理，都是用推理方法判断命题真假的依据**.

**五条公理：**

(1)等于同量的量彼此相等；

(2)等量加等量，其和相等；

(3)等量减等量，其差相等；

(4)彼此能重合的物体是全等的；

(5)整体大于部分.

**五条公设：**

(1)过两点能作且只能作一直线；

(2)线段（有限直线）可以无限延长；

(3)以任一点为圆心，任意长为半径，可作一圆；

(4)凡是直角都相等；

(5)同一平面内一条直线和另外两条直线相交，若在直线同侧的两个内角之和小于180°，则这两条直线经无限延长后在这一侧一定相交.

**3.命题的结构**

数学命题通常由\_\_\_\_\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_\_\_\_\_两部分组成，题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项.这样的命题可以写成“如果……，那么……”或“若……，则……”的形式.

答案：题设；结论

**4.命题真假的判断方法**

要判断一个命题是真命题时，通常依照已学过的定义、定理或公理进行判断，必要时给出推理证明.要判断一个命题是假命题，通常可以采用举反例的方法加以说明.

**5.将命题改写成“如果……，那么……”的形式时应注意的问题**

有些命题没有写成“如果……，那么……”的形式，甚至有许多命题都是简称的，如果要将这样的命题改写成“如果……，那么……”时，那么首先要弄清命题的题设和结论，然后把题设写成“如果……”的形式，把结论写成“那么……”的形式，有时还需要进行适当的语言修饰，以不改原意，语句通顺为原则.

**5.逆命题与逆定理的概念**

如果第一个命题的题设是第二个命题的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，而第一个命题的结论是第二个命题的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，那么这两个命题叫做**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**，把其中的一个命题叫做**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**，另一个命题叫做它的**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**.

如果一个定理的逆命题经过证明也是定理，那么两个定理叫做**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**，其中一个定理是另一个定理的**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**.

答案：结论；题设；互逆命题；原命题；逆命题；互逆定理；逆定理

**6.写一个命题的逆命题的方法**

**任何一个命题都有逆命题，要写出一个命题的逆命题时，通常分两步进行：**

**第一步：找出原命题的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_：**

**第二步：把找出来的结论作为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，找出来的题设作为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，重新组合即为其逆命题.**

**6.定理与逆定理的关系**

有的定理的逆命题是真命题，这个真命题可以看作是定理的逆定理，但有的定理的逆命题是假命题，这个假命题不能称为定理的逆定理.也就是说**不是所有的定理都有逆定理**.

**典型解析**

**类型一：定义与命题的认识**

**例1：**下列语句不属于定义的是( ).

A.连接两点的线段的长度叫做这两点间的距离

B.只含有一个未知数，并且未知数的次数是一次的整式方程是一元一次方程

C.两直线平行，内错角相等

D.从一个角的顶点引出的一条射线，把这个角分成两个相等的角，这条射线叫做这个角的平分线

[解析]A，B，D分别对两点间的距离、一元一次方程、角的平分线的含义做出描述，是定义；C是平行线的性质，不是定义.故选C.

[答案]C

**例2：**下列语句中，不是命题的是( ).

(1)两点之间，线段最短； (2)一方有难，八方支援；

(3)连接*A*、*B*两点； (4)钓鱼岛自古以来就是中国的领土；

(5)不相交的两条直线平行； (6)无论*n*为何自然数时，式子*n*2-*n*+11的值都是质数吗？

A.2个 B.3个 C.4个 D.5个

[解析](1)(4)(5)三个句子对某件事做出判断，它们是命题；(2)(3)(6)三个句子没有对事件做出判断，因此它们不是命题.

[答案]B

[点评]只有对一事件做出肯定或否定判断的句子才是命题，如果一个句子既没有肯定什么，也没有否定什么，则它们一定不是命题.

**类型二：命题的结构认识**

**例3：**把下列命题改写成“如果……，那么……”的形式，并指出命题的题设和结论.

(1)直角三角形中两个锐角的和为90°； (2)当*ac*>*bc*时，有*a*>*b*；

(3)同底等高的两个三角形的面积相等.

[解析]“如果……”是题设，“那么……”是结论.

[答案](1)如果一个三角形是直角三角形，那么它的两个锐角的和为90°.

题设：一个三角形是直角三角形，结论：它的两个锐角的和为90°.

(2)如果*ac*>*bc*，那么*a*>*b*.题设：*ac*>*bc*，结论：*a*>*b*.

(3)如果两个三角形同底等高，那么这两个三角形的面积相等.

题设：同底等高的两个三角形，结论：面积相等.

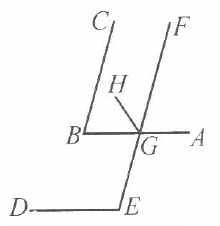
[点评]对那些条件和结论不明显的命题，一般先把它改写成“如果……，那么……”的形式，再找条件和结论，在改写时，要注意语句的通顺，用词准确.

**类型三：命题真假的判断**

**例4：**判断下列命题的真假，如果是假命题的，请举出反例.

(1)如果一个角的两边与另一个角的两边互相平行，那么这两个角相等.

(2)若*a*>*b*，则*ac*2>*bc*2. (3)若*a*2=*b*2，则*a*=*b*. (4)同位角相等.

[解析]根据所学的有关定义、定理、公理进行判断，举反例时，只要举出一个特例就行.

[答案](1)假命题.如图所示，*BC*∥*EF*，*AB*∥*DE*，易知∠*ABC*≠∠*DEF*.

(2)假命题.如*c*=0时，*ac*2=*bc*2.

(3)假命题.如22=(-2)2，但2≠-2.

(4)假命题.如图中∠*DEF*≠∠*HGF*.

**类型四：原命题与逆命题之间的真假关系**

由于任何一个命题都有其逆命题，有的原命题是真命题，而其逆命题是假命题，有的原命题是假命题，而其逆命题是真命题，可见，**命题的真假与命题的互逆性无关**.

**例5：**判断下列命题的逆命题的真假.

(1)若*a*3=*b*3，则*a*=*b*； (2)若*a*>*b*，则-2*a*<-2*b*；

(3)若*ab*>0，则*a*>0，*b*>0； (4)最大内角小于90°的三角形是锐角三角形；

(5)不相等的两个角一定不是内错角； (6)两个直角相等.

[解析]先写命题的逆命题，再判断其真假.

[答案](1)逆命题为：若*a*=*b*，则*a*3=*b*3，这个逆命题是真命题.

(2)逆命题为：若-2*a*<-2*b*，则*a*>*b*.这个逆命题是真命题.

(3)逆命题为：若*a*>0，*b*>0，则*ab*>0.真命题.

(4)逆命题为：锐角三角形中最大的内角小于90°.这个逆命题是真命题.

(5)逆命题为：不是内错角的两个角不相等.这个逆命题是假命题.

(6)逆命题为：相等的两个角是直角.这个逆命题是假命题.

**类型五：定理与逆定理**

**例6：**判断下列定理是否一定有其逆定理.

(1)同旁内角互补，两直线平行. (2)对顶角相等.

[解析]先写出各定理的逆命题，再判断其真假.

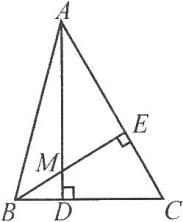
[解]定理(1)的逆命题为“两直线平行，同旁内角互补”，显然这个命题是真命题，所以定理(1)有逆定理.定理(2)的逆命题为“相等的两个角是对顶角”，显然这个命题是假命题，因此定理(2)没有逆定理.

**类型六：命题证明**

**例7：**如图所示，在锐角△*ABC*中，*AD*，*BE*分别是△*ABC*的高，且交于点*M*.

(1)若∠*C*=60°，求证：∠*AMB*=120°.

(2)若∠*AMB*=120°时，∠*C*=60°成立吗？说明理由.



[解析](1)先应用直角三角形中两锐角互余定理，在△*ADC*中求出∠*DAC*，再在△*AME*中求出∠*AME*，然后利用邻补角的性质求∠*AMB*的度数.(2)实际上它是(1)的逆命题，要证明它是真命题，只需逆向模仿(1)的思路即可.

[答案](1)∵*AD*⊥*BC*，

∴△*ACD*为直角三角形，

∴∠*C*+∠*CAD*=90°.

又∠*C*=60°.

∴∠*CAD*=90°-60°=30°.

又*BE*⊥*AC*.

△*AME*是直角三角形，

∴∠*CAD*+∠*AME*=90°，

∴∠*AME*=90°-30°=60°，

而∠*AME*+∠*AMB*=180°，

∴∠*AMB*=180°-60°=120°.

(2)∠*C*=60°成立.理由如下：

∵∠*AME*+∠*AMB*=180°，

∠*AMB*=120°，

∴*AME*=180°-120°=60°.

又*BE*⊥*AC*，

∴△*AME*是直角三角形，

∴∠*CAD*+∠*AME*=90°，

∴∠*CAD*=90°-60°=30°.

∵*AD*⊥*BC*，

∴△*ACD*是直角三角形，

∴∠*C*+∠*CAD*=90°，

∴∠*C*=90°-30°=60°.

**走进中考**

1.(2011·上海中考)下列命题中，真命题是( )．

(A)周长相等的锐角三角形都全等； (B)周长相等的直角三角形都全等；

(C)周长相等的钝角三角形都全等； (D)周长相等的等腰直角三角形都全等．

答案：D

2.(2009·上海中考)已知线段与相交于点，联结，为的中点，为的中点，联结(如图所示)．

(1)添加条件，，求证：．

*O*

*D*

*C*

*A*

*B*

*E*

*F*

(2)分别将“”记为①，“”记为②，“”记为③，添加条件①、③，以②为结论构成命题1，添加条件②、③，以①为结论构成命题2．命题1是 命题，命题2是 命题(选择“真”或“假”填入空格)．

(1) 证明：，

∴． (1分)

∵为的中点，为的中点，

∴，． (1分)

∴． (1分)

∵，，

∴△≌△． (2分)

． (1分)

(2) 真； (3分)

假． (3分)

**同步训练**

1.以下词语叙述的内容可能错误的是( )

(A)命题 (B)公理 (C)定义 (D)定理

答案：A

2.下列命题中：

①如果*a*<*b*，那么*ac*2<*bc*2；②关于*x*的不等式(*a*-1)*x*>1-*a*的解集是*x*<-1，则*a*<1；

③若是自然数，则满足条件的正整数*x*有4个.正确的命题个数是( ).

A.0 B.1 C.2 D.3

答案：C

3.判断下列命题的真假，若是假命题，举出反例.

(1)三角形的内角中至少要有两个锐角； (2)若两个角互补，则一定有一个是锐角；

(3)有一对边相等的两个等腰三角形全等； (4)有两角及一边对应相等的两个三角形全等.

答案：(1)真命题；(2)假命题.如两个直角；(3)假命题.如三角形三条边分别为：3、3、4与3、4、4；(4)真命题

4.下列命题中，其逆命题成立的是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(只填写序号).

①有两边及一角对应相等的两个三角形全等； ②如果两个角是直角，那么它们相等；

③如果两个实数相等，那么它们的平方相等；

④在△*ABC*中，∠*A*、∠*B*为锐角，若∠*A*+∠*B*=90°，那么△*ABC*是直角三角形.

[解析]①的逆命题：全等三角形有两边和一个角对应相等，正确；②的逆命题：相等的两个角是直角，错误；③的逆命题：如果两个数的平方相等，那么这两个数也相等，错误，如：22=(-2)2，但2≠-2；④的逆命题：在△*ABC*中，∠*A*、∠*B*为锐角，若△*ABC*是直角三角形，则∠*A*+∠*B*=90°，正确.

[答案]①④

5.写出以下命题的逆命题，判断逆命题的真假，并说明其中哪一些是逆定理.

(1)等腰三角形两腰上的高相等； (2)两直线平行，内错角相等；

(3)等角对等边；

(4)两条平行直线被第三条直线所截，截得的同位角的角平分线互相平行.

答案：(1)两边上的高相等的三角形是等腰三角形.真命题；(2)内错角相等，两直线平行.真命题且是逆定理；(3)等边对等角，真命题且是逆定理；(4)两条直线被第三条直线所截，截得的同位角的角平分线互相平行，则这两条直线平行.真命题

**跟踪训练**

1.下列命题是真命题的是( ).

(A)若，则*a*2>*b*2 (B)若|*x*|=|*y*|，则*x*=-*y*

(C)若*a*>|*b*|，则*a*2>*b*3 (D)若*a*<1，则>1

Image22答案：A

2.实数*a*，*b*在数轴上的位置如图所示，下列命题是真命题的是( ).

(A)*a*-*b*>0 (B)*ab*>0

(C)|*a*|-*b*<0 (D)|*a*+*b*|=|*a*|+|*b*|

答案：C

3.下列命题中，假命题是( ).

(A)两条直角边对应相等的两个直角三角形全等

(B)等腰三角形顶角的平分线把它分成两个全等三角形

(C)有一个角是60°的等腰三角形是等边三角形

(D)顶角相等的两个等腰三角形全等

答案：D

4.以下命题是真命题的有( )个.

①在同一平面内两条直线被第三条直线所截，同旁内角互补；

②如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边，那么这两个角一定相等；

③两个相等的角一组边平行，那么另一组边也平行；

④一条直线垂直于平行线中的一条，也一定垂直于另一条.

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

答案：A

5.下列命题是假命题的有( )个.

①若*a*>0，*b*>0，则*ab*>0；②两条直线相交，只有一个交点；③等腰三角形是锐角三角形；④等边三角形是等腰三角形.

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

答案：A

6.如果一个定理*A*的逆命题*B*也是一个定理，则*A*是*B*的( ).

(A)逆命题 (B)逆定理 (C)互逆命题 (D)互逆定理

答案：B

7.下列定理中，存在逆定理的是( ).

(A)对顶角相等 (B)凡直角都相等

(C)全等三角形的对应角相等 (D)内错角相等，两直线平行

答案：D

8.以下命题的逆命题为真命题的是( ).

(A)等边三角形的三个角相等 (B)同角的补角相等

(C)在三角形中，钝角所对的边最长 (D)对顶角相等

答案：A

9.以下说法不正确的是( ).

(A)定理一定是命题 (B)逆定理一定是逆命题

(C)逆命题一定是逆定理 (D)定理的逆命题有真有假

答案：C

10.以下说法正确的有( )个.

①每个命题都有逆命题； ②假命题的逆命题是假命题；

③真命题的逆命题都是真命题； ④每个定理都有逆定理.

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

答案：A